三角関数の離散系バージョン

おがわ けんたろう*

2005 年 5 月 15 日

1 はじめに

この文章は、結城 浩さんの「離散系バージョンの関数探し」[*1]の続きです。結城さんは三角関数の離散系バージョンはあまり納得が行かないようなのですが、元のバージョンで納得がいきそうな性質を導いてみます。

2 実際の計算

2.1 離散バージョン三角関数を導く

三角関数といえば振動子形の方程式のほうが自然だと思いますので、以下の差分方程式を満たすとして計算を行います。

$$\begin{aligned}\Delta^2 S(x) &= -S(x)\\ \Delta^2 C(x) &= -C(x)\end{aligned}$$

まず正弦関数に対応する $S(x)$ から計算してみましょう。初期条件は $S(0)=0, S(1)=1$ とします。まず 2 階の差分を計算。

$$\begin{aligned}\Delta^2 S(x) &= \Delta(S(x+1)-S(x))\\ &= \Delta S(x+1)-\Delta S(x)\\ &= S(x+2)-S(x+1)-S(x+1)+S(x)\\ &= S(x+2)-2S(x+1)+S(x)\end{aligned}$$

ですから、

$$\begin{aligned}\Delta^2 S(x) &= -S(x)\\ S(x+2)-2S(x+1)+2S(x) &= 0\end{aligned}$$

となります。線型な 3 項間漸化式の解の計算は別のところでする (付録につけますか...) こととして、さくっととくことにします。漸化式の特性方程式 $t^2+2t+2=0$ は共役な 2 つの複素数根 $(\alpha=1+i, \overline{\alpha}=1-i)$ を

---

*1 http://www.hyuki.com/story/diffsum2.html

持つので、一般項はこんな形になります。

$$
\begin{aligned}
S(x) &= \frac{\Im\Big(\alpha^x\big(S(1)-\overline{\alpha}S(0)\big)\Big)}{\Im\alpha} \\
&= \frac{\Im\Big((1+i)^x\big(S(1)-(1-i)S(0)\big)\Big)}{\Im(1+i)} \\
&= \Im(1+i)^x
\end{aligned}
$$

この表式だと扱いがたいので、複素面上で $(1+i)^x$ どのようになっているか考えて具体的な形にする。累乗を扱うので極座標表現にして、

$$
\begin{aligned}
1+i &= \sqrt{2}\Big(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\Big) \\
&= \sqrt{2}\Big(\exp\frac{\pi}{4}i\Big)
\end{aligned}
$$

となるから、指数関数になって計算が楽ちん。指数法則を使って計算していけばよい。

$$
\begin{aligned}
(1+i)^x &= 2^{\frac{x}{2}}\left(\exp\frac{\pi}{4}x\right) \\
&= 2^{\frac{x}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}x+i\sin\frac{\pi}{4}x\right)
\end{aligned}
$$

となる。これでようやく $S(x)$ は、

$$
S(x) = 2^{\frac{x}{2}}\sin\frac{\pi}{4}x
$$

であらわされる。

同様に余弦関数に対応する $C(x)$ を計算しましょう。初期条件は $C(0)=C(1)=1$ とします。途中までほとんど計算が同じなので、結果だけ書くと、

$$
\begin{aligned}
C(x) &= \frac{\Im\Big(\alpha^x\big(C(1)-\overline{\alpha}C(0)\big)\Big)}{\Im\alpha} \\
&= \frac{\Im\Big((1+i)^x\big(C(1)-(1-i)C(0)\big)\Big)}{\Im(1+i)} \\
&= \Re(1+i)^x \\
&= 2^{\frac{x}{2}}\cos\frac{\pi}{4}x
\end{aligned}
$$

となって、$S(x)$ が正弦関数、$C(x)$ が余弦関数に対応するような形になっている。

2.2 偶奇性

三角関数の離散バージョン $S(x)$ と $C(x)$ が導出できたので、いろいろいじっていきましょう。まずは偶奇性から。計算はどちらも似た計算ですから、$S(x)$ だけ計算過程を書き下して、$C(x)$ は結果だけ記します。

$$
\begin{aligned}
S(-x) &= 2^{-\frac{x}{2}}\sin-\frac{\pi}{4}x \\
&= -2^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\pi}{4}x \\
&= -2^{-x}2^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\pi}{4}x \\
&= -2^{-x}S(x)
\end{aligned}
$$

となって、符号反転に対しては 2^{-x} というスケーリングがかかる。同様に $C(x)$ は、

$$C(-x) = 2^{-x}C(x)$$

となって、やはり同じようなスケーリング係数がかかる。同じ係数なので、あとで簡単にかけるように適当な記号。

$$I(x) = C(x)^2 + S(x)^2 = 2^x$$

とおいておくことにします。先の偶奇性は

$$\begin{aligned} I(x)S(-x) &= -S(x) \\ I(x)C(-x) &= C(x) \end{aligned}$$

という形になります。

2.3 加法定理と減法定理

三角関数の計算に欠かせないのは、やはり加法定理。これを計算しておかないと離散バージョンの関数だけで差分が計算できないので、片つけておきましょう。

$$\begin{aligned} S(\alpha+\beta) &= 2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \sin \frac{\pi(\alpha+\beta)}{4} \\ &= 2^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \left(\sin \frac{\pi}{4}\alpha \cos \frac{\pi}{4}\beta + \cos \frac{\pi}{4}\alpha \sin \frac{\pi}{4}\beta \right) \\ &= \left(2^{\frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\pi}{4}\alpha\right)\left(2^{\frac{\beta}{2}} \cos \frac{\pi}{4}\beta\right) + \left(2^{\frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\pi}{4}\alpha\right)\left(2^{\frac{\beta}{2}} \sin \frac{\pi}{4}\beta\right) \\ &= S(\alpha)C(\beta) + C(\alpha)S(\beta) \end{aligned}$$

同様な計算で $C(x)$ の加法定理は

$$C(\alpha+\beta) = C(\alpha)C(\beta) - S(\alpha)S(\beta)$$

となる。計算過程で三角関数の加法定理を使っているから当たり前だけど、離散バージョンでも加法定理の形はまったく同じ。ただし前に求めておいた偶奇性から減法については同じ形になりません。計算は簡単なので結果だけ示します。

$$\begin{aligned} I(\beta)S(\alpha-\beta) &= S(\alpha)C(\beta) - C(\alpha)S(\beta) \\ I(\beta)C(\alpha-\beta) &= C(\alpha)C(\beta) + S(\alpha)S(\beta) \end{aligned}$$

2.4 差分

ここまで計算すれば、差分が簡単に計算できます。定義から計算してみましょう。前の節で求めた加法定理を使えば簡単に計算できます。

$$\begin{aligned} \Delta S(x) &= S(x+1) - S(x) \\ &= S(x)C(1) + C(x)S(1) - S(x) \\ &= S(x) + C(x) - S(x) \\ &= C(x) \end{aligned}$$

となって、三角関数の離散バージョンでも三角関数と同じ結果になります。同様に $C(x)$ は、

$$\Delta C(x) = -S(x)$$

となります。こちらも同じ形。

2.5 積み残した話

今回求めた三角関数の離散バージョンは連続関数としての三角関数の自然な拡張となっているはずなのだけど、周期性がなく x に大きな値を入れると絶対値が大きくなってしまう。ここが結城さんが納得がいかない点だと思うけど、その理由はどこにあるのだろうか？

正解はおそらく差分の定義で、差分の間隔を 1 としているところに理由があるように思われる。偶奇性のところでちらっと出した、$I(x)$ は差分の間隔 (？) を 1 ではなく δ とおけば、ちゃんと計算していないので適当だけど、おそらく

$$I(x) = (1 + \delta^2)^{x/\delta}$$

のような形になるものと思われる。δ が 0 になるような極限で $I(x)$ は 1 になるのかなと思う。離散化したが故の結果かなと考えている。

あと指数関数と三角関数の間の重要な関係式である Eular の式だけども、その形の一端だけは上の計算で見えていると思う。複素数に拡張した離散バージョンの指数関数 $E(z)$ は、

$$E(z) = (1 + i)^x$$

ではなかろうかと思うのだけど、これを導くには実関数から複素関数に拡張する際に使った Taylor 展開を離散バージョンで求めておく必要がありそう。めんどくさいのだけど、興味があるので誰か計算してみてください。ちがうかもしれない。似た形にはなると思うけど。

あと線型な 3 項間漸化式の解き方 (今回使ったレベル) は要望があれば、この文書に足すつもり。

参考文献

[1] 結城浩, 「ミルカさんの隣で」, `http://www.hyuki.com/story/diffsum.html`, 2005.

[2] 結城浩, 「離散系バージョンの関数探し」, `http://www.hyuki.com/story/diffsum2.html`, 2005.

[3] 吉田武, 『オイラーの贈り物』, ちくま学芸文庫, ISBN4-480-08675-7, 2001.

[4] Ronald L. Gragam,Donald E. Knuth,Oren Patashnik, 『コンピュータの数学』, 共立出版株式会社, ISBN4-320-02668-3, 1993.